
Irrfahrten auf (zufälligen) Bäumen

Vortrag bei der Präsentation der Forschungsergebnisse 1996

DI Christiane Takacs

Inhalt:

Teilchen, die in einem zufälligen Medium diffundieren, werden mathematisch durch Irrfahrten auf zufälligen Graphen modelliert. Dabei sind insbesondere (unendlich) große Graphen interessant. Im einfachsten Fall kann das Medium durch zufällige Bäume unterschiedlichen Typs modelliert werden.

Innerhalb dieses Modells ergeben sich etwa folgende Fragestellungen: Wie schnell (abhängig vom Typ des Baumes und von den Parametern der Irrfahrt) entfernt sich der Irrfahrer von seinem Ausgangsort? Wie sieht die Umgebung des Irrfahrers nach langer Zeit (im Gleichgewicht) aus? Welche Wege wählt der Irrfahrer? Welche Wege wählt der Irrfahrer, wenn die Umwege nicht berücksichtigt werden? Wie wirkt sich bei vergleichbaren Irrfahrten der Typ des zugrundeliegenden Baumes auf die Fluchtgeschwindigkeit aus?

Bei der mathematischen Behandlung dieser Fragen werden Graphentheorie, Markov Ketten und Ergodensätze verwendet und die Verbindungen zwischen der Theorie der Markov Ketten und der elektrischen Netzwerke genutzt.

1. Bäume

Ein bewurzelter Baum (engl.: rooted tree) ist ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen, der aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge E besteht und einen ausgezeichneten Knoten hat, den wir als Wurzel bezeichnen. Die Enden des Baumes werden als Blätter bezeichnet. Knoten, zwischen denen sich eine Kante befindet, bezeichnen wir als Nachbarknoten. Die Anzahl der Nachbarknoten eines Knotens bezeichnen wir als den Grad eines Knotens.

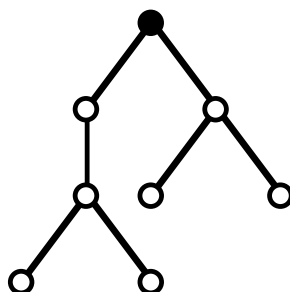


Abbildung 1: Nicht markierter bewurzelter Baum

Da die konkreten Namen der Knoten bei den Irrfahrten keine Rolle spielen, werden hier die Bäume als nicht markiert (engl. unlabeled) betrachtet. Die Betrachtung unmarkierter Bäume macht es möglich, daß man von einem typischen Baum sprechen kann, in dem sich der Irrfahrer i. a. nach langer Zeit befindet. Auf der anderen Seite ist damit der Ort des Irrfahrers nicht immer eindeutig festgelegt.

Die den Irrfahrten zugrundegelegten Bäume werden unendlich, jedoch lokal endlich sein.

2. Elektrische Netzwerke

Wir stellen uns nun vor, jede Kante e eines Baumes sei ein Draht mit einem echt positiven Leitwert $c(e)$ und jeder Knoten sei eine Verzweigung der Drähte. Damit haben wir den Graphen als elektrisches Netzwerk interpretiert.

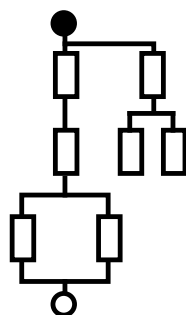


Abbildung 2: Ein Baum als elektrisches Netzwerk

Wir erden nun gewisse Blätter des Baumes und legen an der Wurzel eine Spannung U an. Dadurch fließt ein Strom I durch den Baum. Den Quotienten aus Strom und Spannung I/U bezeichnet man als den effektiven Leitwert C des Baumes (Ohmsches Gesetz).

Es ist bekannt, daß mithilfe der Kenngrößen des elektrischen Netzwerkes, gewisse Eigenschaften der Irrfahrt beschrieben werden können.

3. Irrfahrten

3.1 Pfade und Strahlen

Gegeben sei ein Baum, auf dessen Wurzel sich zum Zeitpunkt 0 ein Teilchen (der Irrfahrer) befindet, der einen Schritt über eine Kante zu einem der Nachbarknoten macht. Nun wird dieser Knoten als die neue Wurzel des Baumes betrachtet und das Spiel beginnt von neuem.

Folie: (Zielscheibe)

Das Resultat, d. h. eine Realisierung der Irrfahrt, ist eine Folge von bewurzelten, unmarkierten Bäumen. Realisierungen der Irrfahrt bezeichnet man als Pfade.

Folie: (Pfad – Overlay)

Oft interessiert einen jedoch nur der kürzeste Weg, der letztendlich zurückgelegt wurde. Eine Realisierung dieses Weges nennt man einen Strahl der Irrfahrt. Auch der Strahl ist eine Folge von bewurzelten unmarkierten Bäumen.

Folie: (Strahl – Overlay)

3.2 Irrfahrt – Netzwerk

Wird bei der Irrfahrt stets jeder Nachbarknoten der (momentanen) Wurzel mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt, so spricht man von einer symmetrischen Irrfahrt. Sind die Kanten des Baumes mit Leitwerten belegt und wird jede Kante e , die von der Wurzel ausgeht, mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu $c(e)$ überschritten, so spricht man von einer durch die Leitwerte c charakterisierten Irrfahrt. Werden alle Leitwerte identisch gleich 1 gesetzt, so kann auch mit diesem Modell die symmetrische Irrfahrt beschrieben werden.

3.3 Fluchtwahrscheinlichkeit (Rekurrenz, Transienz)

Bezeichne a die Wurzel eines Baumes und b eine Menge von (im Unendlichen) kurzgeschlossenen Blättern des Baumes, bezeichne $c(a)$ die Summe der Leitwerte der von a ausgehenden Kanten und $C(a,b)$ den effektiven Leitwert zwischen a und b , so gilt für die Fluchtwahrscheinlichkeit:

$$P[\text{Irrfahrer erreicht } b \text{ vor Rückkehr nach } a] = C(a,b) / c(a)$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich, daß eine Realisierung des Strahls auch ohne konkrete Durchführung der Irrfahrt bestimmt werden kann: Ausgehend von der Wurzel des Baumes wird jede Kante mit einer Wahrscheinlichkeit überschritten, die proportional ist zum Leitwert des daranhängenden Baumes bzw. gleichbedeutend damit, proportional zu dem in dieser Kante fließenden Strom.

Folie: (Strahl ohne Pfad)

Man weiß nun, daß es auf ein und demselben Baum nicht Knoten (als Wurzel) mit einer echt positiven Fluchtwahrscheinlichkeit neben solchen mit einer Fluchtwahrscheinlichkeit Null geben kann. Deshalb unterscheidet man abhängig von der Fluchtwahrscheinlichkeit zwei Kategorien der Irrfahrt, nämlich

- die rekurrente Irrfahrt, wenn die Fluchtwahrscheinlichkeit gleich 0 ist (d. h. der Irrfahrer kehrt mit Sicherheit zurück),
- die transiente Irrfahrt, wenn die Fluchtwahrscheinlichkeit größer als 0 ist.

Die Kategorie der Irrfahrt hängt nicht vom Startknoten ab.

Beispiele:

Symmetrische Irrfahrten auf den ganzen Zahlen oder auf dem zweidimensionalen Gitter \mathbf{Z}^2 sind rekurrent. Symmetrische Irrfahrten auf dem dreidimensionalen Gitter oder auf dem binären Baum sind transient.

Es ist klar, daß die Fluchtwahrscheinlichkeit und damit die Kategorie der Irrfahrt sowohl von der Art des Baumes (insbesondere von seiner Größe) als auch von den Parametern der Irrfahrt (den Leitwerten, die die Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben) abhängt.

4. Typen von Bäumen

Im folgenden interessieren uns nur unendlich große Bäume. Man unterscheidet deterministische und zufällige Bäume. Beachten Sie, daß auch bei einem deterministischen Baum im Hinblick auf die Irrfahrt noch ein Zufall in der Wahl der Wurzel steckt.

4.1 Deterministische Bäume (mit Abbildungen):

- Die einfachsten unendlichen Bäume sind die k -Bäume, d.h. jeder ihrer Knoten hat $k+1$ Nachbarknoten.
- Haben alle Knoten einer Generation denselben Grad, so spricht man von sphärisch identischen Bäumen.
- Folgen die Typen von Knoten einem fix vorgegebenen Schema, das mithilfe eines endlichen gerichteten Graphen veranschaulicht werden kann, so spricht man von einem periodischen Baum. Hierher gehört der Fibonacci Baum.
- Bäume, die aus einem "Rückgrat" und daran hängenden "losen Enden" bestehen, bezeichne ich als Kämmе.

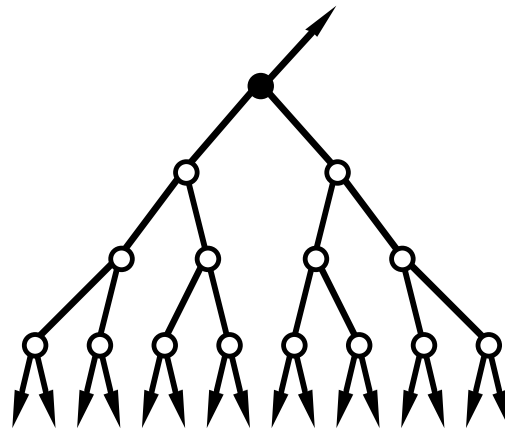


Abbildung 3: 2-Baum (=binärer Baum)

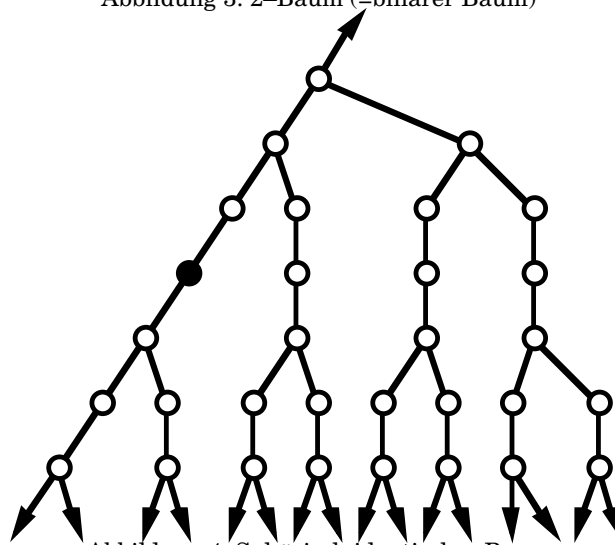


Abbildung 4: Sphärisch identischer Baum

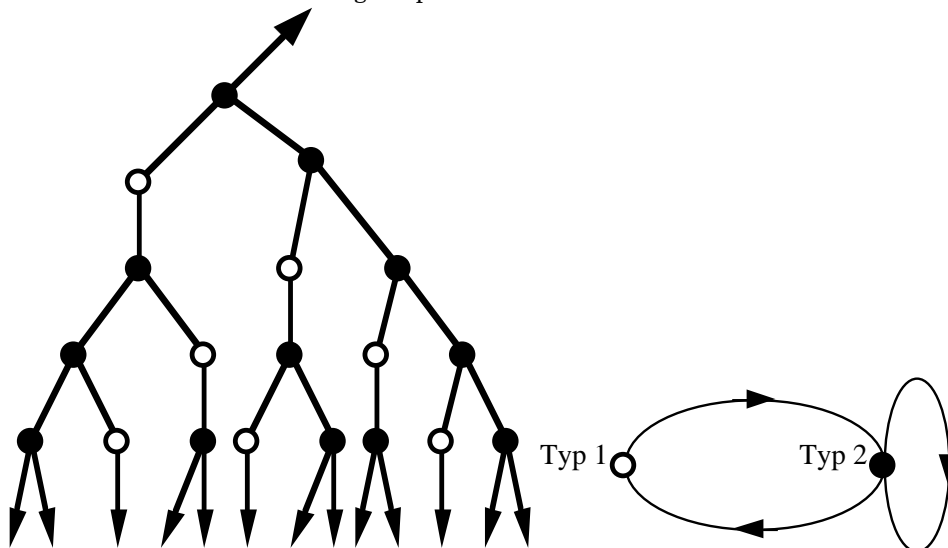


Abbildung 5: Fibonacci Baum (periodisch) und erzeugender Graph

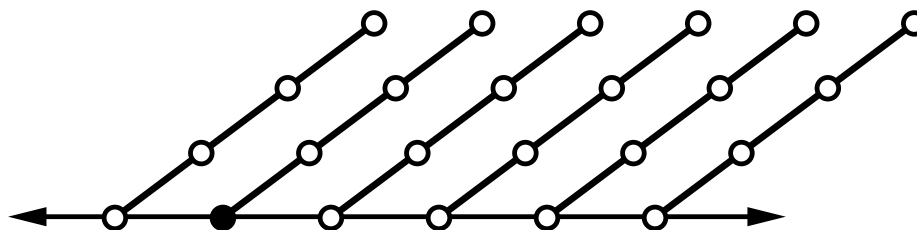


Abbildung 6: 3-Kamm

Einige dieser Bäume können in natürlicher Weise zufällig gemacht werden.

4.2 Zufällige Bäume (mit Abbildungen):

- Galton-Watson Bäume sind Bäume, in denen jeder Knoten einen zufälligen Grad hat, aber die Grade der Knoten vollständig unabhängig und identisch verteilt sind.
- In zufälligen sphärisch identischen Bäumen sind die Grade in den Generationen zufällig, aber vollständig unabhängig und identisch verteilt.
- Zufällige Kämmen entstehen, wenn die Längen der "losen Enden" zufällig, aber vollständig unabhängig und identisch verteilt sind.

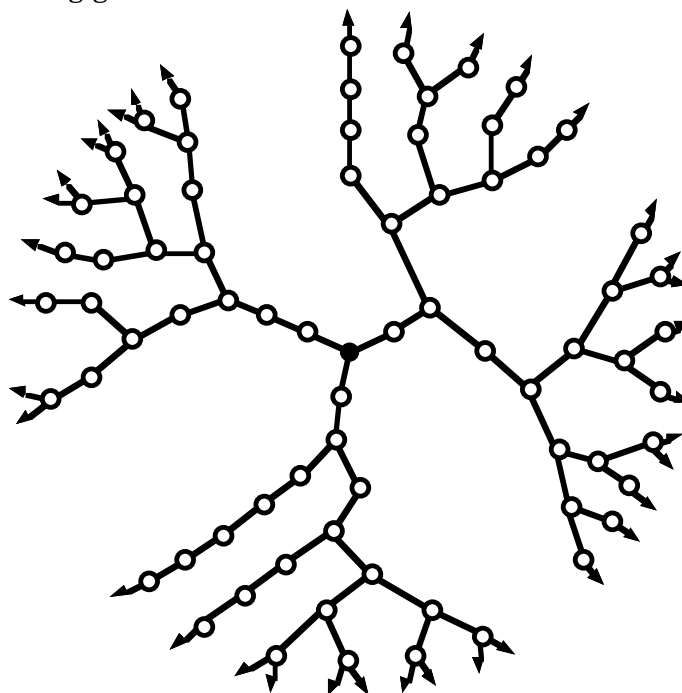


Abbildung 7: Realisierung eines (augmented) Galton - Watson Baumes

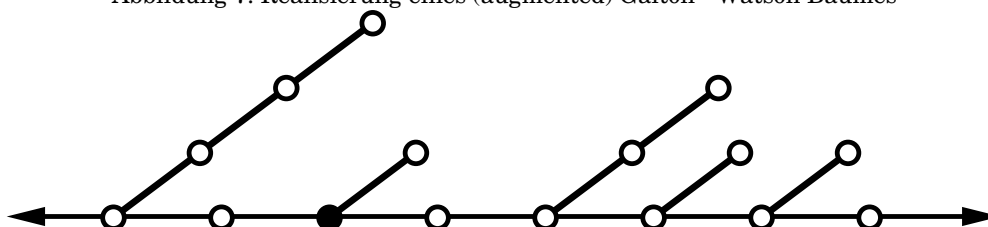


Abbildung 8: Realisierung eines zufälligen Kamms

5. Verzweigungszahl eines Baumes – Eigenschaften der Irrfahrt

Die Verzweigungszahl (engl. branching number) eines Baumes ist ein Maß für die Größe des Baumes. Sie ist gleich der "mittleren" Anzahl der Kanten, in die sich eine Kante verzweigt, das ist um 1 niedriger als die Anzahl der Nachbarknoten, die ein Knoten "im Schnitt" hat.

Die mathematisch exakte Definition ist ungleich komplizierter.

5.1 Beispiele für Verzweigungszahlen

- Die Verzweigungszahl eines k -Baumes ist k .
- Die Verzweigungszahl eines sphärisch identischen Baumes ist gleich dem geometrischen Mittel der um 1 verminderten Knotengrade in den Generationen. Haben z. B. die Knoten in der 1. Generation Grad 2, in der zweiten Generation Grad 3 und ist die 3. Generation wie die erste und die 4. wie die 2. usw., so ist die Verzweigungszahl dieses Baumes gleich $\sqrt{1 \cdot 2}$. Dieselbe Verzweigungszahl hat (fast sicher) jeder zufällige sphärisch identische Baum, bei dem die Knotengrade 2 und 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten.
- Auch für periodische Bäume läßt sich die Verzweigungszahl berechnen. So ist etwa die Verzweigungszahl eines Fibonacci Baumes gleich $(1 + \sqrt{5})/2$.
- Die Verzweigungszahl eines (zufälligen) Kammes ist 1.
- Die Verzweigungszahl eines Galton Watson Baumes ist gleich dem arithmetischen Mittel der um 1 verminderten Anzahl der Nachbarknoten aller Knoten. Hat etwa in einem Galton Watson Baum jeder Knoten jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ Grad 2 oder 3, so ist seine Verzweigungszahl fast sicher gleich $(1+2)/2$.

5.2 Der Heimwehparameter der Irrfahrt

Wir wollen nun einen sogenannten heimwehkranken Irrfahrer betrachten. Er kommt aus einer fernen Vergangenheit (von zuhause) und befindet sich nun in der Wurzel eines Baumes. Sein Heimweh bringt es mit sich, daß er auf seinem Weg diejenige Kante, die zurück (nachhause) führt, bevorzugt gegenüber den i. a. mehreren Kanten die von zuhause wegführen. Diese Bevorzugung wird durch einen Parameter λ beschrieben. Dabei bedeutet:

- $\lambda > 1$ Heimweh
- $\lambda < 1$ Fernweh
- $\lambda = 1$ weder Heimweh noch Fernweh, d. h. symmetrische Irrfahrt

Glücklicherweise kann man diese verschiedenen Arten der Irrfahrt durch geeignete Wahl der Leitwerte auf den Kanten erzeugen.

Weiß man nun, daß sich der Irrfahrer in seinem ersten Schritt von zuhause entfernt, so kommt ein Irrfahrer mit höherem Heimwehparameter mit größerer Wahrscheinlichkeit in die Wurzel zurück als ein weniger heimwehkranker Irrfahrer. Für die Fluchtwahrscheinlichkeit ist die Beziehung gerade umgekehrt:

Heimwehparameter klein \Leftrightarrow Fluchtwahrscheinlichkeit groß.

Konkret: Ist λ kleiner als die Verzweigungszahl des Baumes, so ist die Irrfahrt transient. Ist λ größer als die Verzweigungszahl des Baumes, so ist die Irrfahrt rekurrent.

Heimwehparameter $\lambda < 1$ werden wir bei den Kämmen verwenden, da dort die symmetrische Irrfahrt rekurrent (Fluchtwahrscheinlichkeit 0) ist. Die Käme sind ja Teilgraphen des \mathbf{Z}^2 .

6. Fluchtgeschwindigkeit

Wenn eine Irrfahrt transient ist, heißt das, daß bei jedem Besuch in demselben Knoten, eine reelle Chance (positive Wahrscheinlichkeit) besteht, daß der Irrfahrer nicht mehr zurückkommt. Jeder Knoten wird also mit Sicherheit nur endlich oft besucht. Hier hat es nun Sinn, zu fragen, wie schnell die Entfernung vom Ausgangsknoten zunimmt. Der Ausdruck

$$\frac{1}{n} \text{ Entfernung vom Ausgangsknoten nach } n \text{ Schritten}$$

beschreibt die mittlere Geschwindigkeit bis zum Zeitpunkt n .

Unter günstigen mathematischen Umständen (Voraussetzungen der Ergodentheorie) nehmen die statistischen Schwankungen, mit denen diese Größe behaftet ist, mit wachsendem n immer mehr ab, sodaß sich unabhängig vom Ausgangspunkt im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ fast sicher eine Konstante, die asymptotische Fluchtgeschwindigkeit (engl. speed) ergibt. Diese soll hier kurz Fluchtgeschwindigkeit genannt werden.

- In vielen Fällen ist es nun möglich, den Startbaum der Irrfahrt so auszuwählen, daß sie stationär wird, d. h. daß jeder Baum, auf dem sich der Irrfahrer befindet, zu jedem Zeitpunkt nach demselben Gesetz ausgewählt wird, wenn man den Rest der Irrfahrt nicht kennt. Macht der Irrfahrer nun einen Schritt, so kann man mithilfe von Symmetrieüberlegungen feststellen, um wieviel er im Erwartungswert vorangekommen ist. Die Ergodentheorie besagt nun, daß diese Größe mit obiger Konstante (falls sie existiert) übereinstimmt.
- Oft kann man jedoch einfacher die zufällige Vorwärtsauswahl eines Strahls stationär wählen, bzw. von der stationären Irrfahrt nur diejenigen Zeitpunkte betrachten, in denen der Strahl verlängert wird. Kennt man nun hier die stationäre Verteilung des Baumes, wobei nur die Zukunft wesentlich ist, so kann auch hier die Fluchtgeschwindigkeit berechnet werden.

Je nach Typ des Baumes ist die eine oder die andere Vorgangsweise günstiger. Die zweite Vorgangsweise ist insbesondere bei Bäumen angebracht, bei denen alle Strahlen gleich aussehen (sphärisch identische, Käme) bzw. auf den Strahlen nur endlich viele verschiedene Zukunftsbäume (periodische Bäume) auftreten können.

7. Konkrete Ergebnisse für die in 4. angegebenen Bäume

7.1 Symmetrische Irrfahrt

Typ des Baumes	Verzweigungszahl	Fluchtgeschwindigkeit
zufällig sphärisch identisch	$\sqrt{2} = 1.4142$	$1/7 = 0.1429$
Galton Watson	$3/2 = 1.5000$	$1/6 = 0.1667$
Fibonacci	$(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180$	$(3-\sqrt{2})/7 = 0.2265$
2-Baum	2	$1/3 = 0.3333$

Man vermeint eine Tendenz zu sehen, daß mit steigender Verzweigungszahl auch die Fluchtgeschwindigkeit zunimmt. Das ist im allgemeinen nicht richtig.

Ein sehr schönes Gegenbeispiel für obige These liefern sphärisch identische Bäume: Typ $x|y$ besagt, daß auf jeweils x Generationen von Knoten mit Grad 2 jeweils y Generationen von Knoten mit Grad 3 folgen.

Typ des Baumes	Verzweigungszahl	Fluchtgeschwindigkeit
1 3	$2^{0.75} = 1.6818$	0.2456
10 30	$2^{0.75} = 1.6818$	0.1600
20 60	$2^{0.75} = 1.6818$	0.1143
zufällig sphärisch identisch	$2^{0.75} = 1.6818$	$3/13 = 0.2308$

Man sieht, je längere unverzweigte Stücke ein Baum aufweist, desto langsamer die Irrfahrt.

Die folgende Tabelle soll zeigen, wie sich die Geschwindigkeiten der symmetrischen Irrfahrt bei gleich großen Bäumen verschiedenen Typs verhalten:

Typ des Baumes	Verzweigungszahl	Geschwindigkeit
zufällig sphärisch identisch	$(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180$	0.2100
Galton Watson	$(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180$	0.2060
Fibonacci	$(1+\sqrt{5})/2 = 1.6180$	0.2265

Gilt ein Gesetz: Je zufälliger der Baum, desto langsamer die symmetrische Irrfahrt? Diese Frage ist, abgesehen von Spezialfällen, die auf eine positive Antwort hinweisen, ungelöst.

Bemerkung 2002: In einer Arbeit (2001) habe ich gezeigt, dass diese intuitive Vermutung nicht haltbar ist.

7.2 Unsymmetrische Irrfahrt mit Parameter λ

Die asymptotische Fluchtgeschwindigkeit der unsymmetrischen Irrfahrt kann für alle in 4. angegebenen Bäume außer für Galton Watson Bäume berechnet werden.

Betrachtet man etwa einen 2-Baum (binärer Baum) und darauf eine Irrfahrt mit Parameter λ , so ergibt sich eine Geschwindigkeit von $(2 - \lambda) / (2 + \lambda)$.

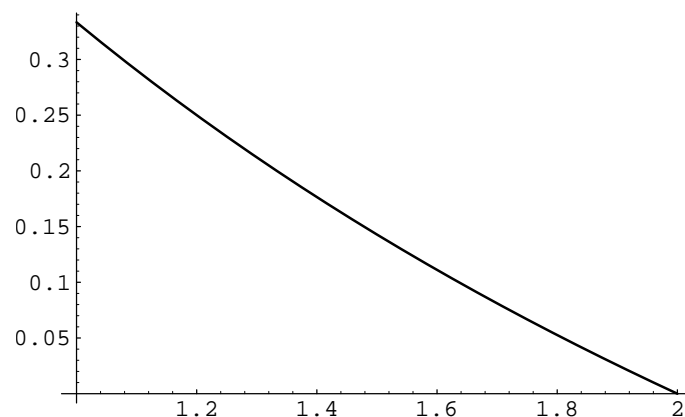


Abbildung 9: Fluchtgeschwindigkeit als Funktion von λ auf einem 2-Baum

Man sieht, die Geschwindigkeit sinkt mit λ . Das ist zwar bei vielen Typen von Bäumen richtig, im allgemeinen jedoch nicht.

Findet etwa eine unsymmetrische Irrfahrt mit Parameter $\lambda < 1$ auf einem Kamm statt, dessen lose Enden eine fixe Länge N aufweisen, so bewirkt ein kleines λ zwar einerseits, daß der Irrfahrer auf dem Rückgrat selten zurückkehrt, andererseits aber auch, daß er nur mit großer Mühe aus einem losen Ende, in das er sich verlaufen hat, herauskommt. Ebenso zweischneidig ist auch die Wahl eines großen Parameters $\lambda \rightarrow 1$, da nun zwar die Rückkehr aus den losen Enden relativ schnell geht, auf dem Rückgrat jedoch kein Vorankommen ist. In der folgenden Abbildung ist die asymptotische Fluchtgeschwindigkeit als Funktion von λ für verschiedene N dargestellt. Man sieht, daß die Geschwindigkeit mit steigendem N abnimmt und gleichzeitig das Maximum immer näher zu 1 rückt.

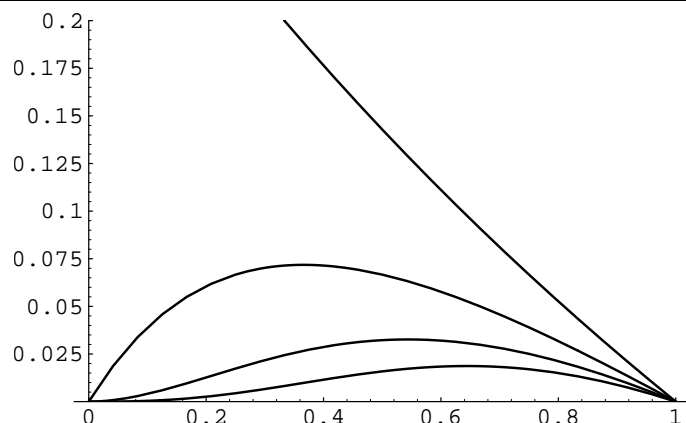


Abbildung 10: Die Fluchtgeschwindigkeit abhängig von λ für den 1-, 2-, 3-, 4-Kamm

Für den Kamm mit zufällig langen Enden (vollständig unabhängig und identisch Poisson verteilt mit Mittelwert α) ergeben sich vergleichbare Resultate.

Literatur

- [C] Chung, K. L. (1967). Markov Chains With Stationary Transition Probabilities, Springer, Berlin Heidelberg New York
- [DS] Doyle, P., Snell, L. (1984). Random Walk and Electric Networks, Mathematical Association of America
- [J] Jacobs, K. (1960). Neuere Methoden und Ergebnisse der Egodentheorie, Springer, Berlin Göttingen Heidelberg
- [KM] Konsowa, M., Mitro, J. (1991). The Type Problem of Random Walks on Trees, J. Theor. Prob. 4, 535–550
- [L1] Lyons, R. (1990). Random Walks and Percolation on Trees, Ann. Prob. 18, 931–958
- [L2] Lyons, R. (1992). Random Walks, Capacity and Percolation on Trees, Ann. Prob. 20, 2043–2088
- [LP] Lyons, R., Pemantle, R. (1992). Random Walks in a Random Environment and First Passage Percolation on Trees, Ann. Prob. 20, 125–136
- [LPP] Lyons, R., Pemantle, R., Perez, Y. (1994). Ergodic Theory on Galton Watson Trees, I: Speed of Random Walk and Dimension of Harmonic Measure, Preprint
- [P] Petersen, K. (1983). Ergodic Theory, Cambridge University Press, Cambridge London New York New Rochelle Melbourne Sidney
- [R] Rosenblatt, M. (1971). Markov Processes, Structure and Asymptotic Behavior, Springer, Berlin Heidelberg New York
- [S] Solomon, F. (1975). Random Walks in a Random Environment, Ann. Prob. 3, 1–31

Bemerkung 2002: Die Darstellung ist insgesamt richtig, gefällt mir nach wie vor sehr gut, könnte eventuell mit einigen neuen Resultaten angereichert werden.